NOTA	

(DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificad@ con nota mínima.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables y formularios
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 ptos.]**

a) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una Tautología.

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$$

b) Determine el valor de verdad de la siguiente proposición. Luego niéguela.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \in \mathbb{Z}$$

Solución:

a)

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$$
$$[(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)] \to [\sim (p \vee q) \vee r]$$
$$[r \vee (\sim p \wedge \sim q)] \to [\sim (p \vee q) \vee r]$$
$$\sim [r \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [\sim (p \vee q) \vee r]$$
$$[\sim r \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q)] \vee [\sim (p \vee q) \vee r]$$
$$[\sim r \wedge (p \vee q)] \vee \sim (p \vee q) \vee r$$
$$[(r \vee \sim r) \wedge [r \vee (p \vee q)]] \vee \sim (p \vee q)$$
$$r \vee (p \vee q) \vee \sim (p \vee q)$$
$$V$$

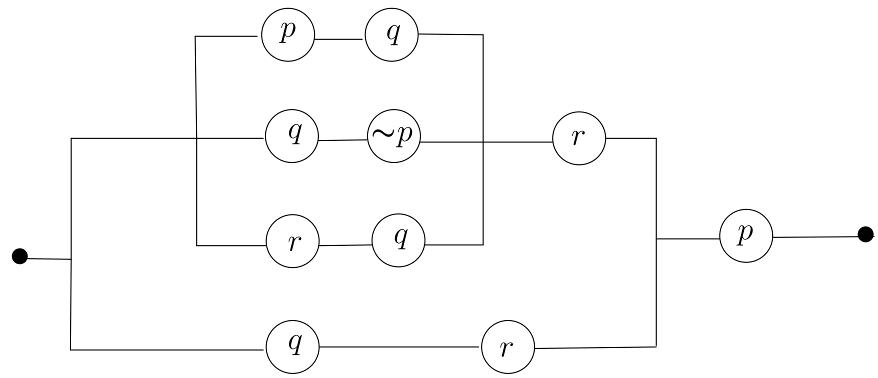
b)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \in \mathbb{Z}$$

La proposición es verdadera, ya que el $0 \in \mathbb{Z}$, y $x \cdot 0 = 0 \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
La negación sería:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \cdot y \notin \mathbb{Z}$$

2) **[20 ptos.]** Dado el siguiente circuito Booleano, encuentre su polinomio booleano, simplifíquelo al máximo, y dibuje un circuito más simple al inicial.



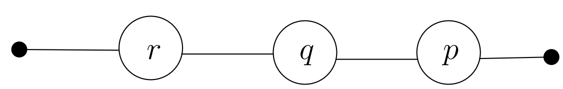
Obs: Recordar que $\sim p = \neg p = \overline{p}$

Solución: El polinomio booleano sería $\langle\{[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r)\rangle \wedge p$. Ahora queremos reducirlo al máximo.

$$\langle\{[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r)\rangle \wedge p$$

$$\langle\{[(q \wedge (p \vee \sim p)) \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r)\rangle \wedge p$$
$$\langle\{[q \vee (r \wedge q)] \wedge r\} \vee (q \wedge r)\rangle \wedge p$$
$$\langle(r \wedge q) \vee (r \wedge r \wedge q) \vee (q \wedge r)\rangle \wedge p$$
$$r \wedge q \wedge p$$

El circuito Booleano asociado a ésta reducción sería:



3) **[20 ptos.]** Sea $A = \{x/\ x \text{ es un número natural primo menor que } 15\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19\}$ y $C = \{1, 4, 5, 7, 9, 19\}$, determine si las siguientes proposiciones son Verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) $(\exists x \in A \cap B)(\forall y \in A \cap C) : x + 4 \geq y$
   b) $(\forall x \in B \cup C)(\exists y \in A) : (y \text{ es divisor de } x)$
   c) $(\forall x \in A \cap (B \cup C))(\forall y \in A) : x \cdot y$ es impar
   d) $(\exists x \in A \cup (B \cap C))(\exists y \in A) : \left(\dfrac{x}{y}\right) \in A$

Primero seria bueno escribir los conjuntos que involucran las proposiciones. Así

$$A \cap B = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$A \cap C = \{5, 7\}$$

$$B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$B \cap C = \{5, 7, 9, 19\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19\}$$

Ahora veamos las proposiciones:

a) $(\exists x \in A \cap B)(\forall y \in A \cap C) : x + 4 \geq y$
Esta proposición sería verdadera, ya que basta tomar cualquier elemento de $A \cap B$, por ejemplo el 3, y con esto se cumple que $3 + 4 \geq 5$ y $3 + 4 \geq 7$, por lo que se cumple para todo $y \in A \cap C$.

b) $(\forall x \in B \cup C)(\exists y \in A) : (y \text{ es divisor de } x)$
Esta proposición es falsa, ya que por ejemplo el 19 esta en $B \cup C$, y los divisores de 19 son solo el 1 y el 19, y ninguno de los dos esta en A.

c) $(\forall x \in A \cap (B \cup C))(\forall y \in A) : x \cdot y$ es impar
Esta proposición también es falsa, ya que el 2 pertenece al conjunto A, y $x \cdot 2$ es par, para todo x en $A \cap (B \cup C)$

d) $(\exists x \in A \cup (B \cap C))(\exists y \in A) : (\frac{x}{y}) \in A$
Esta es verdadera, ya que, existe el 9 en $A \cup (B \cap C)$, y el 3 en A, y se cumple que, $\frac{9}{3} = 3 \in A$